目　录

一、复数和复变函数

1. 复　数

在数学中，最早为人们所研究的一个纯数学问题，就是求解二次方程．四千多年前，古代巴比伦人就掌握了二次方程的解法．那时所发现的技巧，还基本上与今天在中学数学教科书中所用的方法相同．例如，解方程 $x^2-2x-15=0$：用“配方”法，将这个方程写成 $x^2-2x+1-16$ 的形式，也就是 $(x-1)^2-16=0$，即得到 $(x-1)^2=16$，所以 $x-1=4$ 或 $x-1=-4$；因此 $x=5$ 或 $x=-3$．但是，对有些二次方程，这个“配方”法就失灵了．例如要解简单的二次方程 $x^2+1=0$，这导致我们要找这样的数 x，它的平方等于 -1：$x^2=-1$．这似乎是不可能的，因为一个数的平方好像不应是负的．

想像如果有一个数，它的平方是 -1，这将会发生什么情况呢？这个数，今天已习惯上采用 i 来表示，并称之为“虚”单位；当有 $i^2=i\times i$ 出现时，就用 -1 代替之．这样，方程 $x^2+1=0$ 就变成有解了，其解为 $x=i$ 和 $x=-i$．另外，如方程 $x^2-10x+40=0$，即 $(x-5)^2$

$= -15$ 也变成有解了，其解为 $x = 5 + \sqrt{15}i$ 和 $x = 5 - \sqrt{15}i$. 要验证它，我们只须计算

$$\begin{aligned}
&(5 \pm \sqrt{15}i)^2 - 10(5 \pm \sqrt{15}i) + 40 \\
&= (5 \pm \sqrt{15}i)(5 \pm \sqrt{15}i) - 10(5 \pm \sqrt{15}i) + 40 \\
&= 25 \pm 5\sqrt{15}i \pm 5\sqrt{15}i + 15i^2 - 50 \mp 10\sqrt{15}i + 40 \\
&= 25 - 15 - 50 + 40 = 0.
\end{aligned}$$

但是，一个二次方程有一个 $x = 5 + \sqrt{15}i$ 或 $x = 5 - \sqrt{15}i$ 的解，究竟有什么好处呢？归根结底 i 是一个"虚"数.

文艺复兴时期，意大利数学家卡尔达诺 (G. Cardano，被称为虚数之父)注意到在解三次方程时(例如方程 $x^3 - 12x + 16 = 0$)，可发生这样的情况：虽然用了虚数来计算，而求出的根却仍是普通的"实"数. 这个观察说明，对 -1 的平方根，不管称它是虚数与否，它不单是一个玩物.

直到十九世纪，数学家才解开复数的奥秘.他们将形如 $a + ib$ 的数称为复数，把它解释为平面上的点.确切地讲，我们在平面上画两条互相垂直的直线，一条是水平的，称为 x-轴或**实轴**；一条是铅直的，称为 y-轴或**虚轴**；两条直线的交点是 O，称为**原点**. 于是，每个复数 $a + bi$ 可以用平面 xOy 上坐标为(a, b)的点 Z 来表示(如图 1).因此，平面上每个点表示一个复数；反之，每个复数可由平面上的一个点来表示.

复数 $a + bi$ 也可用 xOy 平面上从原点$(0, 0)$引到(a, b)点的向量来表示，这就对复数又引进了一种新看

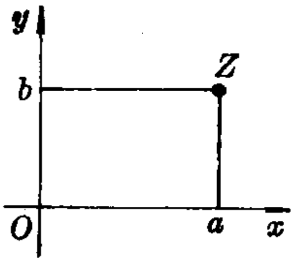


图 1

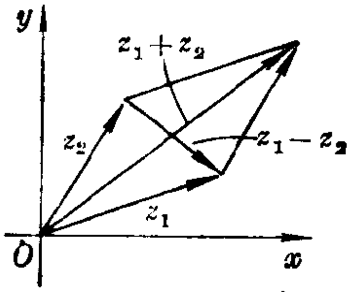


图 2

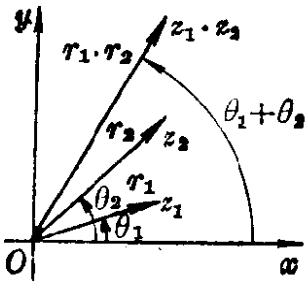


图 3

法．两个点的加法是用图 2 所显示的“力的平行四边形”法则完成的．这是相应于上述的加法的算术定义：$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$．这就使得我们有理由认为复数不仅具有单纯形式推广的意义，而且还可以用它来表示某些物理量．两个点的乘积的几何意义包含更多一些东西．为了要计算图 3 中的两个点 z_1 和 z_2 的乘法，我们记从原点到它们的距离分别为 r_1 与 r_2，从原点到 z_1 与 z_2 的连线与正实轴之间的夹角（称为**辐角**）分别为 θ_1 与 θ_2．然后，我们标出与原点 O 之距离为 $r=r_1\cdot r_2$ 辐角为 $\theta_1+\theta_2$ 的点．这个点，或是这点所对应的复数，就称之为这两个点（或复数）z_1 与 z_2 之积．这个定义也是与算术定义一致的．让我们对虚数单位 i 来验证这个定义．点 i 到 O 点的距离是 1，它的辐角是 90°．所以，点 $i^2=i\cdot i$ 到 O 点的距离应为 $1\times1=1$，而辐角 $90°+90°=180°$．这就是点 -1．这样，我们有 $i^2=-1$ 的几何解释．在这里，我们提及从 O 点到一个复数 $z=x+yi$ 的距离，称为 z 的模，用 $|z|$ 表示．由勾股弦定理，$|z|^2=x^2+y^2$．

复数是从求解二次、三次方程而引进的．人们也许会

期望为了解四次方程，以及次数更高的方程，将需要把数的概念作更进一步的扩充，等等.幸而没有这个必要. 对我们所引进的复数，能解每一个代数方程，而不论其次数是什么，不论系数是实数还是复数. 更确切地说，即任何复系数代数方程

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

在复数域中有 n 个根.这就是**代数基本定理**，这是代数方程理论中一项特别重要的结论.

代数基本定理指出，复数做成一个数系，在这个复数域中，任何代数方程都有解. 进一步的研究表明，多项式的理论，即使这些多项式都具有实系数，当且仅当我们把多项式的值在整个复数域中来考察时，才可能得到最终的形式. 只有当我们把多项式作为一个复变函数来考虑时，它的性质才弄得清楚.

2. 复变数指数函数和三角函数

在数学上，一个函数是将一个数对应于另一个数的规则. 最简单的情况下，这个规则由像 $f(x)=2x^3-6$ 这样的代数公式给出.这种称之为多项式的函数，自然也对复变数 z 有定义，$f(z)=2z^3-6$ 就是一个复变函数.

但是，也有些函数是用完全不同的方式来定义的.重要的例子是三角函数.假设一个点从单位圆周上的 A 点开始(见图 4)，沿反时针方向移动. 如这个点沿着圆周移动 x 而达到 B 点，则 $\sin x$ 就是 B 到水平轴的距离(如果 B 在水平轴的下面，算是负的). 整个圆周的长度为

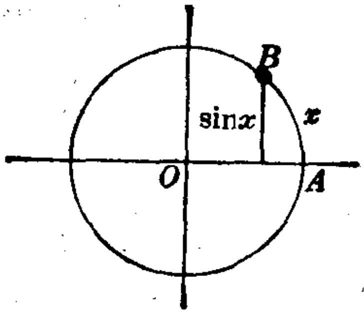


图 4

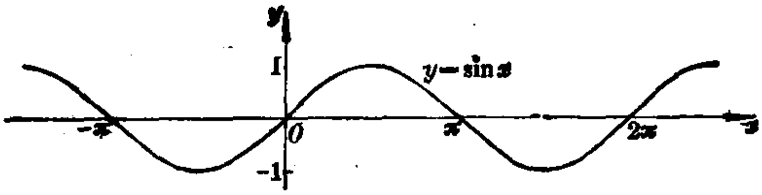


图 5

2π，因此点 A 沿圆周移动 2π 距离之后，仍在 A 点. 这表明 $\sin x$ 是以 2π 为周期的周期函数. 故有 $\sin(x+2\pi)=\sin x$. 函数 $\sin x$ 的图像如图 5 所示. 三角函数原来是为了天文和航海的计算而引进的，它们在测量中有广泛的应用.更重要的是，三角函数出现在我们要描写诸如弹簧的振动，潮汐、行星运动，交流电或原子光衍射的周期过程.

另一个重要的函数是指数函数 e^x.数 e(它近似等于 2.718)可以定义为一个数量，它等于将 1 元钱存入一所怪诞的银行一年后所获得的本利和，这所怪诞的银行是给 100%的年息并连续地计算复利 †. e^x 是存 x 年后所得的本息总量. 当 x 是一整数或分数时，符号 e^x 有通常的意义.指数函数用于描写那些类似于复利的过程，例如衰变，或人口的增长，等等.e^x 的图像如图 6 所示.

† 将 1 元钱存入一个给100%年息的银行，一年后的本利和应为2元.如银行一个月算一次复利，则一年后的本利和应为$\left(1+\frac{1}{12}\right)^{12}$. 如果$\frac{1}{n}$年算一次复利，则一年后的本利和为$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$. 连续的给以复利，则一年后的本利总和为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$.

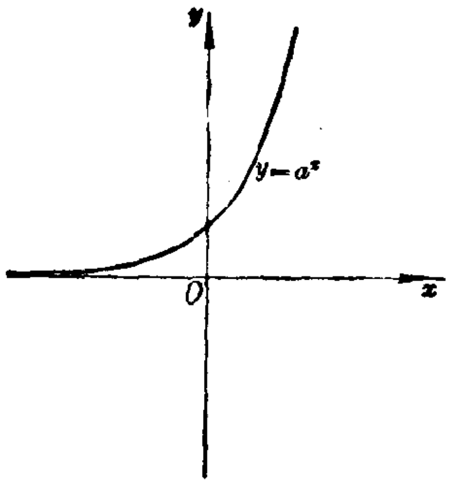


图 6

十八世纪的一项重要发现，也是微积分的最早应用之一，是指数函数和三角函数表示为无穷次多项式，或者，用现在的语言来讲，是表示为“幂级数”．这些公式是简单的，即对一切实数 $x\in(-\infty,+\infty)$，成立着

$$e^x=1+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\cdots, \qquad (1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}-\frac{x^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}+\cdots, \qquad (2)$$

和

$$\cos x=1-\frac{x^2}{1\cdot 2}+\frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}-\frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\cdots. \qquad (3)$$

这是些关于原点展开的实变数的幂级数．我们能否将它们“拓展”成复变数 z 的相应函数

$$e^z=1+\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots, \qquad (4)$$

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots, \qquad (5)$$

和

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots \qquad (6)$$

呢？它们的定义域是什么区域呢？

为了回答这个问题，我们需要先介绍关于复数项级数的“收敛”或“绝对收敛”的基本概念．

设 $z_1, z_2, \cdots, z_k, \cdots$ 是复数序列，称

$$z_1+z_2+\cdots+z_k+\cdots \tag{7}$$

为**复数级数**，记作$\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ 或 $\sum z_k$. 如果存在复数 S,对于任给的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 N(它与 ε 有关),使得当 $n>N$ 时，

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k - S\right|<\varepsilon,$$

则称级数(7)是**收敛的**,其和为 S. 利用实数项与复数项级数之间的关系,以及实数项级数的柯西收敛原理,即可得到复数项级数(7)收敛的必要且充分条件是:对于任给的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N(与 ε 有关),当 $n>N$ 时($p=1,2,3,\cdots$),

$$|z_{n+1}+z_{n+2}+\cdots+z_{n+p}|<\varepsilon.$$

如果级数 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_k|+\cdots$收敛,则称复数项级数(7)**绝对收敛**.

阿贝尔(N. H. Abel)定理 如果幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-a)^k = a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots \tag{8}$$

在 $z_1\neq a$ 点收敛，那么对满足 $|z-a|<|z_1-a|$ 的任何 z,(8)不仅收敛,而且绝对收敛.

证明 由于级数(8)在 z_1 收敛,所以有

$$\lim_{n\to+\infty} a_n(z_1-a)^n=0.$$

因此,存在着有限常数 M，使得 $|a_n(z_1-a)^n|\leqslant M$, $n=0,1,2,\cdots$.把级数(8)写成

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_1-a)^n\cdot\left(\frac{z-a}{z_1-a}\right)^n,$$

我们有

$$|a_n(z-a)^n| = |a_n(z_1-a)^n| \cdot \left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n$$

$$\leqslant M\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|^n = Mk^n,$$

其中 $k=\left|\frac{z-a}{z_1-a}\right|<1$.

由于级数 $\sum Mk^n$ 收敛，级数 (8) 在满足 $|z-a|<|z_1-a|$ 的任何点不仅收敛，而且绝对收敛.

根据阿贝尔定理，每个幂级数(8)都有一个最大的收敛圆盘 $|z-a|<R$：当 $|z-a|<R$ 时，幂级数(8)绝对收敛；当 $|z-a|>R$ 时，它发散. 这个 R，称为(8)的**收敛半径**. (8)的收敛半径可以用达朗贝尔 (J. L. R. D'Alembert)法则或柯西(A. L. Cauchy) 法则求出：如果下列条件之一成立：

$$l=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

$$l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

$$l=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{即} \lim\sup|a_n|^{1/n},$$

那么，当 $0<l<+\infty$时，级数(8)的收敛半径 $R=\frac{1}{l}$；当 $l=0$ 时，$R=+\infty$；当 $l=+\infty$ 时，$R=0$.

根据阿贝尔定理，由于幂级数(1)、(2)和(3)在正实轴的每一点都收敛的，因此，幂级数(4)、(5)和(6)在整个平面上都是绝对收敛的，故由(4)、(5)和(6)所定义的复指数函数和复三角函数，在全平面上都是有定义的.

指出它们之间的关系，这将是有益处的．在等式(4)中，以 iz 代 z，即得

$$e^{iz}=1+i\frac{z}{1!}-\frac{z^2}{2!}-i\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots.$$

将无因子"i"的各项和有因子"i"各项分别集中在一起，则得

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z. \tag{9}$$

同理可得

$$e^{-iz}=\cos z-i\sin z. \tag{10}$$

公式(9)和(10)名为**欧拉**(L. Euler)**公式**．由(9)和(10)解出 $\cos z$ 和 $\sin z$，即得

$$\cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),\quad \sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}). \tag{11}$$

非常重要的是，指数定律对于复变数仍然成立：

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}. \tag{12}$$

我们从定义出发来证明(12)：由定义

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=\left(1+\frac{z_1}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}+\cdots\right)\cdot\left(1+\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}+\cdots\right),$$

我们把级数逐项相乘，并将所得之项写成正方形：

$$\begin{array}{l}
1\cdot 1+1\cdot\frac{z_2}{1!}+1\cdot\frac{z_2^2}{2!}+1\cdot\frac{z_2^3}{3!}+\cdots.\\
\frac{z_1}{1!}\cdot 1+\frac{z_1}{1!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1}{1!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_1}{1!}\cdot\frac{z_2^3}{3!}+\cdots\\
\frac{z_1^2}{2!}\cdot 1+\frac{z_1^2}{2!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^2}{2!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_1^2}{2!}\cdot\frac{z_2^3}{3!}+\cdots\\
\frac{z_1^3}{3!}\cdot 1+\frac{z_1^3}{3!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^3}{3!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\frac{z_1^3}{3!}\cdot\frac{z_2^3}{3!}+\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

我们把在同一对角线上的同类项集合在一起，得

$$e^{z_1}\cdot e^{z_2}=1+\left(\frac{z_1}{1!}+\frac{z_2}{1!}\right)+\left(\frac{z_1^2}{2!}+\frac{z_1}{1!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_2^2}{2!}\right)+\cdots, \tag{13}$$

其一般项为

$$\frac{z_1^n}{n!}+\frac{z_1^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\frac{z_2}{1!}+\frac{z_1^{n-2}}{(n-2)!}\cdot\frac{z_2^2}{2!}+\cdots+\frac{z_2^n}{n!}$$

$$=\frac{1}{n!}\left(z_1^n+\frac{n!}{1!(n-1)!}z_1^{n-1}\cdot z_2+\frac{n!}{2!(n-2)!}z_1^{n-2}\cdot z_2^2+\cdots+z_2^n\right).$$

利用牛顿(I.Newton)二项定理，这一般项化为$\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}$.

于是，(13)式的一般项与 $e^{z_1+z_2}$ 的一般项一致. 这就证明了指数定律(12).

利用欧拉公式(9)，令 $z=iy$，则得

$$e^{iy}=\cos y+i\sin y. \tag{14}$$

特别，当 $y=\pi$ 时，注意到 $\cos\pi=-1$、$\sin\pi=0$，上述公式变成

$$e^{i\pi}=-1.$$

它给出了数学上四个重要的数：e, π, i 和 1 之间的美妙关系. 可见，复数的引入，揭露了数学中表面上看来无关的部分的和谐及它们之间意想不到的联系. 利用指数定理和(14)，设 $z=x+iy$，则函数 e^z 可表成实变函数的有限形式：

$$e^z=e^x(\cos y+i\sin y). \tag{15}$$

上面所得到的公式，对于研究函数 e^z 的性质，就非常方便. 由于 $e^x\neq 0$，而且(15)式中的 $\cos y$ 和 $\sin y$ 不可能同时为零，因此，在全平面上函数 $e^z\neq 0$.另外，易知函数 e^z 具有周期 $2\pi i$，即

$$e^{z+2\pi i}=e^{z}.$$

利用公式(11)，易知在复数域内 $\cos z$ 和 $\sin z$ 皆具有周期 $2\pi i$，且正弦定理和余弦定理皆成立.

在这里要着重指出，虽然 $\cos^2 z+\sin^2 z=1$，但由此不能推导出 $|\cos z|\leqslant 1$，$|\sin z|\leqslant 1$. 因为一般说来，$\cos^2 z$ 及 $\sin^2 z$ 不是非负的实数. 例如当 $z=2i$ 时，上两个不等式就不成立. 不仅如此，甚至 $\cos z$ 和 $\sin z$ 都不是有界的. 事实上，取 $z=iy$，令 $y\to+\infty$，由(11)即得

$$|\cos iy|=\frac{1}{2}(e^{y}+e^{-y})\to+\infty,$$

$$|\sin iy|=\frac{1}{2}(e^{y}-e^{-y})\to+\infty.$$

3. 解析函数的一般概念

一个能表示成“无穷次多项式”(或称“幂级数”)的函数，称为“解析”函数. 每个这样的函数，能对复值进行计算. 值得注意的是，大多数在纯粹数学和数学应用于自然科学上有兴趣的函数，都是解析的. 所以，复分析(即解析函数的研究)是数学的中心部分.

设 $f(z)$ 是平面区域 G 上的复值函数，若 f 在 G 内任一点 z_0 可展开成幂级数，就是说，若存在幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

及 $r>0$，使这幂级数在 $|z-z_0|<r$(它包含在区域 G 内)内绝对收敛，且当 $|z-z_0|<r$ 时

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n, \tag{15}$$

则称 $f(z)$ 在区域 G 上是解析的，并称 $f(z)$ 是区域 G 上的**解析函数**.

设幂级数 $f(z)=\sum a_n z^n$ 的收敛半径是 R（这里 $R>0$），则 $f(z)$ 在收敛圆域 $\{z:|z|<R\}$ 内任一点可展开成关于这一点的幂级数. 事实上，设 $r>0$，且 $|z_0|+r<R$，则对于 $|z-z_0|<r$，有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n[z_0+(z-z_0)]^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_0^{n-k}(z-z_0)^k.$$

上述级数是绝对收敛的，所以，经过交换求和次序后，得到

$$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{n=k}^{\infty}a_n\binom{n}{k}z_0^{n-k}\right](z-z_0)^k.$$

它在圆域 $|z-z_0|<r$ 内是绝对收敛的.

上述定理说明，$f(z)$ 在其收敛圆域 $|z|<R$（这里 $R>0$）内是解析的.

如果存在点 z_0 的一个邻域，函数 $f(z)$ 在这邻域内解析，我们就说函数 $f(z)$ 在 z_0 点是解析的. 因此，"$f(z)$ 在区域 G 内解析"等价于"$f(z)$ 在区域 G 的每一点解析". 可见解析性是个局部概念.

4. 函数的可微性

我们来研究复变函数的微分运算.

设 G 是 $\mathbf{C}$ 中的开集，函数 $f:G\to\mathbf{C}$. 如果 a 是 G 内的一个点，我们说 $f(z)$ 在点 a 是**可导**（或**可微**）的，是指

如果极限

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

存在. 这个极限值用 $f'(a)$ 来表示，称为 f 在 a 点的**导数**. 即对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正数 δ，使得当 $0<|z-a|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{f(z)-f(a)}{z-a}-f'(a)\right|<\varepsilon. \tag{16}$$

如果 $f(z)$ 在 G 内点点可导，则称 f 在 G 内**可导**，或是**全纯的**.

如果 f 在 G 内可导，则 $f'(a)$ 就定义了一个导函数 $f':G\to\mathbf{C}$，称为 f 的**一阶导数**. 如果 $f'(z)$ 在 G 内也是可导的，则称 f 在 G 内是**二阶可导的**，记此导数为 $f''(z)$；如此类推，如果它的各阶导函数都是可导的，就称它是**无穷次可导的**.

在这里，我们自然会问：如果 $f(z)$ 在开集 G 内解析，那么 f 是否在 G 内可导呢？回答是肯定的，而且 f 在 G 内还无穷次可导. 它主要基于下述定理.

定理 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$ 的收敛半径 $R>0$，那么

1° 对于每个 $k\geqslant 1$，级数

$$\sum_{n=k}^{\infty}n(n-1)\cdots(n+k-1)a_nz^{n-k} \tag{17}$$

的收敛半径为 R；

2° 函数 f 在 $|z-a|<R$ 内是无穷次可导的，并且，对于所有的 $k\geqslant 1$ 及 $|z-a|<R$，$f^{(k)}(z)$ 由级数(17)给出；

3° $$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a).\tag{18}$$

证明 不妨假定 $a=0$.

1° 我们首先注意到，如果对于 $k=1$，1°被证明了，那么 1° 在 $k=2,3,\cdots$ 时也将随之成立（事实上，1° 在 $k=1$ 的情形应用到级数 $\sum na_nz^{n-1}$ 上，便得到 $k=2$ 的情形）. 我们已知 $R^{-1}=\limsup|a_n|^{1/n}$，而希望证明 $R^{-1}=\limsup|na_n|^{1/(n-1)}$. 由洛必达法则，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log n}{n-1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n-1}}=1$. 下面证明

$$\limsup|a_n|^{\frac{1}{n-1}}=R^{-1}.\tag{19}$$

设 $(R')^{-1}=\limsup|a_n|^{\frac{1}{n-1}}$，那么 R' 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nz^{n-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_{n+1}z^n$ 的收敛半径. 注意到 $z\sum a_{n+1}z^n+a_0=\sum a_nz^n$，所以如果 $|z|<R'$，那么 $\sum|a_nz^n|\leqslant|a_0|+|z|\sum|a_{n+1}z^n|<\infty$. 这就给出 $R'\leqslant R$. 如果 $|z|<R$，且 $z\neq0$，那么 $\sum|a_nz^n|<\infty$，$\sum|a_{n+1}z^n|\leqslant\frac{1}{|z|}\cdot\sum|a_nz^n|+\frac{1}{|z|}|a_0|<\infty$，所以 $R\leqslant R'$. 这就得到 $R=R'$. 故上述关系(19)是成立的. 因此，不难知道

$$\limsup|na_n|^{\frac{1}{n-1}}=\lim n^{\frac{1}{n-1}}\cdot\limsup|a_n|^{\frac{1}{n-1}}=R^{-1}.$$

2° 对于 $|z|<R$，设 $g(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\,a_nz^{n-1}$，$S_n(z)=\sum\limits_{k=0}^{n}a_kz^k$，$R_n(z)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}a_kz^k$. 固定 $|z|<R$ 内的一点 w，固

定 r，使得$|w|<r<R$. 我们要证明 $f'(w)$ 存在且等于 $g(w)$. 为此，设 $\delta>0$ 是任意的，只要使得$\{|z-w|<\delta\}$ 包含在 $\{|z|<r\}$ 中. 设 $|z-w|<\delta$,那么

$$\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)$$

$$=\left[\frac{S_n(z)-S_n(w)}{z-w}-S_n'(w)\right]$$

$$+[S_n'(w)-g(w)]+\left[\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right], \tag{20}$$

现在

$$\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}=\frac{1}{z-w}\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k(z^k-w^k)=\sum_{k=n+1}^{\infty}a_k\left(\frac{z^k-w^k}{z-w}\right),$$

而

$$\left|\frac{z^k-w^k}{z-w}\right|=|z^{k-1}+z^{k-2}w+\cdots+zw^{k-2}+w^{k-1}|\leqslant kr^{k-1},$$

因此

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|kr^{k-1}.$$

因为 $r<R$,所以$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|a_k|kr^{k-1}$ 收敛，于是，对于任意的 $\varepsilon>0$,存在正整数 N_1,使得当 $n\geqslant N_1$ 和 $|z-w|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{R_n(z)-R_n(w)}{z-w}\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因 $\lim S_n'(w)=g(w)$,所以存在正整数 N_2，使得当 $n\geqslant N_2$ 时 $|S_n'(w)-g(w)|<\frac{\varepsilon}{3}$. 设 $n=\max(N_1,N_2)$,这时我们可选取 $\delta>0$,使得当 $0<|z-w|<\delta$ 时，

$$\left|\frac{S_n(z)-S_n(w)}{z-w}-S_n'(w)\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

把这些不等式代入(20)，便得到

$$\left|\frac{f(z)-f(w)}{z-w}-g(w)\right|<\varepsilon,$$

只要 $0<|z-w|<\delta$. 这就是 $f'(w)=g(w)$.

3° 直接计算，我们得到 $f(0)=f^{(0)}(0)=a_0$. 利用(17)(当 $a=0$ 时)，我们得到 $f^{(k)}(0)=k!a_k$，这就给出公式(18).

根据上述定理，可得：如果函数 $f(z)$ 在开集 G 内解析，那么 $f(z)$在 G 内可导；而且，导函数 $f'(z)$在 G 内解析，甚至 f 的任意 k 阶导函数 $f^{(k)}(z)$ 在 G 内都解析.

反之，若 $f(z)$ 在开集 G 内可导(即全纯)，$f(z)$ 是否在 G 内解析呢？以后我们会知道，f 在 G 内也是解析的. 因此，函数的解析性与全纯性是等价的.

设 G 是 $\mathbf{C}$ 中开集，$f:G\to\mathbf{C}$. 如果在 G 内存在 a 的某个邻域，$f(z)$ 在这个邻域内可导，我们就说 f"在 G 内的一点 a 是全纯的". 如果 $f(z)$ 在 G 内点点全纯，则称 f"在 G 内是全纯的".

如同在微积分学中一样，容易知道，在 G 内全纯函数的和及乘积仍是全纯函数. 还有，如果 f 和 g 在 G 内是全纯的，G_1 是 G 内的点集，g 在 G_1 内不等于零，那么$\dfrac{f}{g}$ 在 G_1 内是全纯的.

设 $w=f(z):G\to\mathbf{C}$，由于每个复数 $z=x+iy$ 可以用平面 xOy 上的点 (x, y) 来表示，而复数 $w=u+iv$ 可用 uOv 平面(函数平面)上的点表示，于是，从几何的

观点看，复变函数

$$w=f(z)$$

在复数平面 xOy 上的点与函数平面 uOv 上的点之间定义了一个对应关系.换言之，复变函数给复数平面到函数平面建立了一“映照”. 给了一个复变函数，这就是说，在 (x, y) 和 (u, v) 之间给了一个对应.因此，给定了一个复变函数，和给定两个函数

$$u=u(x, y), \qquad v=v(x, y)$$

是等价的.据此，显然有

$$w=u+iv=u(x, y)+iv(x, y).$$

譬如说，若 $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$，则

$$u=u(x, y)=x^2-y^2, \qquad v=v(x, y)=2xy.$$

由是，若 f 在 G 内的一点 a 是可导的，则当 z 在 a 的邻域内以任何路径 γ 趋于 a 时，极限

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\in\gamma}}\frac{f(z)-f(a)}{z-a}$$

均存在，且此极限均等于 $f'(a)$.特别，当 z 沿着水平方向趋于 a，那末此极限就是 $f(z)$ 关于 x 的偏导数，因此，

$$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{21}$$

同理，当 z 沿着垂直方向趋于 a，则有

$$f'(a)=\frac{\partial f}{\partial iy}=-i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

由是，若 $f(z)=u(x, y)+iv(x, y)$ 在开集 G 内可导，则 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 G 内处处可微，而且满足条件：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \dfrac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial u(x, y)}{\partial y} = -\dfrac{\partial v(x, y)}{\partial x}. \end{cases} \tag{22}$$

满足两个方程，是函数 $w=u+iv$ 存在导数的必要条件.原来,方程组(22)不仅是必要的，而且也是充分条件(假若函数 u 和 v 具有全微分的话).条件(22)叫做**柯西-黎曼方程**.这一方程组给出了复变函数的全纯性质和函数论与数学物理问题之间的关系，而且还可以利用它来求函数的导数.

要想证明函数 $w=e^z$ 可导，可以利用柯西-黎曼方程.根据公式(15),对 $w=e^z$ 有

$$u=e^x\cos y,\ v=e^x\sin y;$$

将这两个函数代入(22),即可证明柯西-黎曼方程成立.这函数的导数,我们可以根据公式(21)算出.由此即得

$$\frac{dw}{dz}=e^z.$$

根据公式(11),容易证明三角函数皆可导,而且，在微积分中所常遇到的关于这些函数的导数的那些公式仍然适用.

5. 对数函数 Ln z

知道一下函数 Ln z 的性质,对我们来说是非常重要的.正如在实数域中一样,若

$$z=e^w,$$

则定义对数函数 $w=\text{Ln}\,z$,

为了研究 Ln z,我们把复数 z 写成三角形式

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

利用公式(15),若设 $w = u + iv$,则得

$$z = e^w = e^u(\cos v + i\sin v).$$

将所得的关于 z 的两个式子加以比较,即得

$$\begin{cases} e^u = r, \\ \cos v + i\sin v = \cos\varphi + i\sin\varphi. \end{cases}$$

由于 u 和 r 都是实数,则由上述第一个关系式,即得

$$u = \mathrm{Ln}\, r,$$

在这里,Ln r 是实数的自然对数的普通值. 第二个关系式仅当

$$\cos v = \cos\varphi, \qquad \sin v = \sin\varphi$$

时成立,而对于这等式,v 与 φ 只能相差 2π 的整倍数:

$$v = \varphi + 2n\pi,$$

但对于任何整数值 n,第二关系式均成立. 于是所得的关于 u 和 v 的式子,我们有

$$w = \mathrm{Ln}\, z = \ln r + i(\varphi + 2n\pi). \qquad (23)$$

公式(23)对于所有异于零的复数值 z 定义了函数 Ln z,它包含有一个任意的整数 n. 这就是说, Ln z 是一个多值函数:对于任意固定的一个 n,我们就得到了函数 Ln z 的一个可能的值.

但 Ln z 的不同值相互间是有机地联系着的. 事实上, 比如说, 我们在点 $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ 固定 $n = 0$, 其对应值 $w_0 = \ln r_0 + i\varphi_0$. 设 C 是一条通过 z_0 点并包围座标原点的闭曲线(图 7). 我们现在假定 z 点沿 C 依逆时针方向

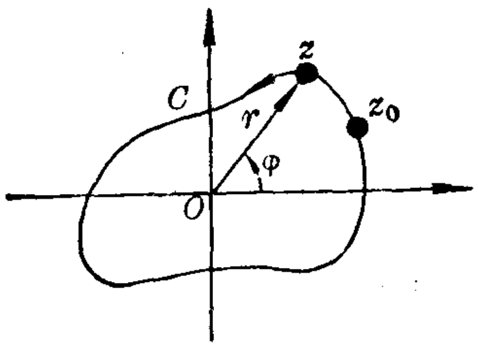


图 7

连续变动．当 z 移动时，辐角 φ 将连续增加，r 将连续改变，当 z 点经过了整个闭曲线时，φ 即增大 2π，而 r 没有改变．因此当点 z 从 z_0 点出发沿 C 曲线依逆时针方向连续移动一周回到 z_0 点时，就得到了另外一个函数值

$$\ln r_0 + i(\varphi_0 + 2\pi).$$

这证明了函数的任意一个值可以连续地变到另一个值，为此，就必须让 z 点绕座标轴原点连续地转过必要的圈数．点 $z=0$ 叫做函数 $\operatorname{Ln} z$ 的支点，确切地说，称为**对数支点**．

假如我们希望只限于讨论函数 $\operatorname{Ln} z$ 的一个单值支，我们就必须禁止 z 点绕包围原点 $z=0$ 的闭曲线移动．为此，只需从座标原点向无限远点引一条连续的若当曲线，然后禁止越过这条曲线即可（这条曲线叫做割线）．假若 z 在一张具有割线的平面上变动，则已经不可能从 $\operatorname{Ln} z$ 的一个值变到另一个值，因而当我们从对数在某一点 z_0 的一个固定的值出发时，我们在每一点只能得到一个对数值．这样分离出来的函数 $\operatorname{Ln} z$ 叫做它的一个单值连续分支，简称一单值支．

比如说，假如我们将 z-平面沿负实轴割开，我们就得了 $\operatorname{Ln} z$ 的一支，它的辐角只限于在范围

$$(2k-1)\pi < \varphi < (2k+1)\pi$$

内变动，这里的 k 是任一整数．

当我们只考虑对数函数的一个单值支时，我们可以来研究它的导数.设

$$r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x},$$

容易证明 $\mathrm{Ln}\,z$ 满足柯西-黎曼方程条件，而它的导数可根据公式(21)计算，得

$$\frac{d\,\mathrm{Ln}\,z}{dz}=\frac{1}{z}.$$

我们特别要指出的，$\mathrm{Ln}\,z$ 的导数已经是一单值函数.

二、复积分　柯西积分公式及其推论

1. 复变函数的积分

对于解析函数的性质的研究，复变函数的积分这一概念起着最为重要的作用. 复变函数沿曲线求积分这一概念，相当于实变函数中的定积分这一概念.

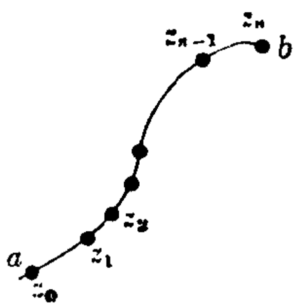


图 8

设 C 是连接端点 a 和 b 的弧线，函数 $f(z)$ 在 C 的某个邻域有定义. 我们将弧 C 用点

$$a=z_0,\ z_1,\ \cdots,\ z_n=b$$

分成一些小的部分，然后来考虑和数

$$S=\sum_{k=1}^{n}f(z_k)(z_k-z_{k-1}).$$

假如函数 $f(z)$ 在 C 的某邻域内连续，而 C 是一有长弧线，则如同实变函数的定积分一样，我们可以类似地证明，在将分点的数目 n 增大，使得相邻两个分点之间的距离趋于零时，和数 S 有一个完全确定的极限. 这极限叫做"f 沿弧线 C 的积分"，记为

$$\int_C f(z)dz.$$

我们要注意，在定义上述复积分时，我们实际上已经选定了 C 的始点和终点，换言之，我们已经选定了沿曲线 C 积分的方向.

根据上述的积分的定义，我们容易证明下列一些简单的积分性质.

1° 两函数和的积分，等于被加函数的积分和，

$$\int_C [f(z)+g(z)]dz=\int_C f(z)dz+\int_C g(z)dz.$$

2° 常数因子可以拿到积分符号之外，

$$\int_C Af(z)dz=A\int_C f(z)dz.$$

3° 若弧 C 是弧 C_1 和 C_2 之和，则

$$\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz.$$

4° 若 C^- 是弧 C 按反方向所取的弧，则

$$\int_{C^-} f(z)dz=-\int_C f(z)dz.$$

所有这些性质，对于和数 S 来说皆很显然，而对于积分来说，则可从取极限得出.

5° 若弧 C 之长等于 L，而且在弧 C 上有不等式

$|f(z)| \leqslant M$,则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant ML.$$

我们来证明这一性质．由于对 C 上的任一组分点组：$z_0=a$，z_1，…，$z_n=b$，对和数 S 有下列不等式

$$|S| = \left|\sum f(z_k)(z_k - z_{k-1})\right|$$
$$\leqslant \sum |f(z_k)|\,|z_k - z_{k-1}| \leqslant M\sum |z_k - z_{k-1}| \leqslant ML.$$

当 $\max|z_k - z_{k-1}| \to 0$ 时，第二因子的和数，表示内接于弧 C 且以 z_k 为顶点的折线各段之长的和，趋于极限 L．因此

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leqslant M\int_C |dz| = ML.$$

全纯函数论的重要事实，就是下面的柯西积分定理．

设 G 是一单连通区域，$f(z)$ 在 G 内可导，则对 G 内任一简单闭曲线 C，我们有

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{24}$$

若又假定导函数 $f'(z)$ 在 G 内连续，则易知定理是成立的．事实上，设 $f(z)$ 的实部和虚部分别为 $u(x, y)$、$v(x, y)$，则它们在 G 内是连续可微的，而且满足柯西-黎曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

于是，由

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x, y)dx - v(x, y)dy + i\int_C v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

和格林公式，我们有

$$\int_C f(z)dz = \iint_D \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dxdy + i\iint_D \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) dxdy = 0,$$

其中 D 表示由 C 所围成的内部区域.

由上述定理可知,设 z_0 和 z 是 G 内任意两点,则沿区域内连接 z_0 和 z 的任何弧所取的积分值,即只与端点 z_0 和 z 有关,而与连接 z_0 和 z 的积分路径无关.因此,若固定 z_0,则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta$$

只与 z 点有关.函数 $F(z)$ 叫做 $f(z)$ 的**不定积分**.

$f(z)$ 的不定积分具有导数 $F'(z)$,且 $F'(z) = f(z)$.

2. 柯西积分公式

由上述积分定理,我们可以建立下述柯西积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \tag{25}$$

其中 C 是单连通区域 G 内任一闭曲线,而且如不特别声明它总是依逆时针方向所引的一条闭围道.

这个公式把可导函数在闭围道内的函数值用函数在围道上的值表示出来.这是一个极其重要的公式,是研究复变函数论的一个基本工具.

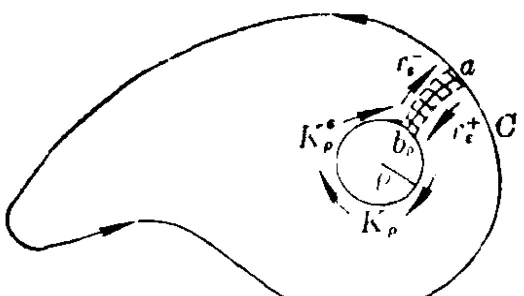


图 9

我们现在来证明这一公式.设 z 固定,ζ 是自变数.令积分号下的被积函数为

$$\varphi(\zeta)=\frac{f(\zeta)}{\zeta-z},$$

它在 C 内不是可导的，因此，我们不能直接把柯西积分定理应用到 $\varphi(\zeta)$ 上.

设 K_ρ 表示圆周 $|\zeta-z|=\rho$，它包含在 C 内，我们将证明

$$\int_C\varphi(\zeta)d\zeta=\int_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta. \tag{26}$$

设弧 γ 位于 C 内，联 C 上的点 a 和 K_ρ 上的点 b_ρ；γ_ε^+ 和 γ_ε^- 分别表示位于 γ 两侧且在 C 内的弧线，当 $\varepsilon\to0$ 时，它们皆趋于极限弧线 γ；K_ρ^ε 表示 K_ρ 除去与阴影条形相交的弧段，C_ε 表示 C 除去与阴影条形相交的弧段. 显然，当 $\varepsilon\to0$ 时，$K_\rho^\varepsilon\to K_\rho$，$C_\varepsilon\to C$. 如图 9 所示，$C_\varepsilon+\gamma_\varepsilon+K_\rho^\varepsilon+\gamma_\varepsilon^-$ 构成一条 G 内的闭曲线，在此曲线的内部 $\varphi(\zeta)$ 是可导的. 据柯西积分定理，我们有

$$\left(\oint_{C_\varepsilon}+\int_{\gamma_\varepsilon^+}+\oint_{K_\rho^\varepsilon}+\int_{\gamma_\varepsilon^-}\right)\varphi(\zeta)d\zeta=0.$$

令 $\varepsilon\to0$，由于 γ_ε^+ 和 $\gamma_\varepsilon^-\to\gamma$ 和 γ^-，$K_\rho^\varepsilon\to K_\rho$，即得

$$\oint_C\varphi(\zeta)d\zeta+\oint_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=0.$$

故(26)式成立.

由是，我们只要证明

$$\lim_{\rho\to0}\oint_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=2\pi i f(z)$$

就行了. 为此，令

$$\oint_{K_\rho}\varphi(\zeta)d\zeta=\oint_{K_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

$$=\oint_{K_\rho}\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z}d\zeta+f(z)\oint_{K_\rho}\frac{d\zeta}{\zeta-z}. \tag{27}$$

我们先计算第二项.在圆周 K_ρ 上,

$$\zeta = z + \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

注意到 z 与 ρ 都是常数,我们即得

$$d\zeta = \rho(-\sin\theta + i\cos\theta)d\theta = i\rho(\cos\theta + i\sin\theta)d\zeta.$$

$$\zeta - z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

故得

$$\oint_{K\rho}\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \oint_{K\rho} i d\theta = 2\pi i.$$

现在我们证明(27)中第一加项当 $\rho\to 0$ 时其极限值为零. 事实上,由于 f 在 z 点是可导的,因此,当 ρ 充分小时,

$$\left|\frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}\right| \leqslant M.$$

于是,利用积分性质 5°,便有

$$\left|\oint_{K\rho}\frac{f(\zeta) - \zeta(z)}{\zeta - z}d\zeta\right| \leqslant M\int_{K\rho}|d\zeta| = \pi M\rho\to 0$$

(当 $\rho\to 0$ 时).

至此,我们证明了柯西公式.

3. 将可导函数展成幂级数

利用柯西积分公式(25),即可证明可导复变函数的两个性质.

1° 任何复变函数,若它在区域 G 内具有一阶导数,则它也具有各阶导数.

事实上,由柯西积分公式,对 C 内的 z,

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

由于积分号下的函数关于 z 是可导的，因之，交换积分和求导的次序，则得

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

在积分号下的函数又是关于 z 是可导的，因此，同理可得

$$f'(z)=\frac{1\cdot 2}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^2}d\zeta.$$

余此类推，我们即得到一般公式

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z)^{n+1}}, \tag{27}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$.

2° 若 $f(z)$ 在开集 G 内可导，则对 G 内任何一点 a，有幂级数展开式

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots, \tag{28}$$

其级数的收敛半径 $R_a\geqslant \mathrm{dist}(a,\ \partial G)$，$\partial G$ 表示 G 的边界.

这定理说明，若 $f(z)$ 在开集 G 内可导，则 $f(z)$ 在 G 内解析. 可见 $f(z)$ 在开集 G 内解析与可导是等价的.

我们来证明这定理. 由于 a 是 G 的内点，则

$$\mathrm{dist}(a,\ \partial G)=\inf_{z\in\partial G}|z-a|>0.$$

令 C_ρ 表示圆周：$|z-a|=\rho<\mathrm{dist}(a,\partial G)$. 由柯西积分公式，对 C_ρ 内的点子，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}. \tag{29}$$

记 $\zeta-z=(\zeta-a)-(z-a)$，则得

$$\frac{1}{\zeta-z}=\frac{1}{(\zeta-a)-(z-a)}=\frac{1}{\zeta-a}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}.$$

因 z 在圆周 C_ρ 之内，而 ζ 位于 C_ρ 上，故得

$$\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1,$$

因之，根据几何级数公式，有

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)}=1+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^2+\cdots+\left(\frac{z-a}{\zeta-a}\right)^n+\cdots,$$

而右边级数是收敛的．将它们代入(29)，则得

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\left[\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}+(z-a)\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^2}+\cdots\right.$$
$$\left.+(z-a)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}+\cdots\right]d\zeta.$$

交换积分与求和的次序(我们可以严格地证明这种交换次序的合理性)，于是，我们有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}d\zeta+\frac{(z-a)}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^2}+\cdots$$
$$+\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}+\cdots$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n,$$

其中

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}.$$

利用公式(27)，即得

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a),\qquad 其中\ n=0,1,2,\cdots. \tag{30}$$

故展式(28)对 G 内任何一点成立，而且其幂级数在 $|z-a|<\rho<\operatorname{dist}(a, \partial G)$ 内收敛.

4. 整函数与亚纯函数

如果函数 $f(z)$ 在全平面上解析，那么就称为**整函数**.这时,在 $|z|<+\infty$ 内,$f(z)$ 可用一个幂级数来表示,这幂级数对于一切 z (这里 $|z|<\infty$)都收敛.若我们讨论在坐标原点的展开式,则整函数可以表示如下

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\cdots+a_nz^n+\cdots. \qquad (31)$$

若在这级数中，从某一项开始，其往后的所有系数都为零,则这函数就是一个多项式,

$$p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n.$$

假若在展开式中有无限多项系数异于零，则称此种整函数为**超越整函数**.公式(4)、(5)和(6)中所给出的 e^z,$\sin z$ 和 $\cos z$ 就是超越整函数.

关于整函数,有下列重要的刘维尔定理:有界整函数一定恒等于常数.

事实上,由公式(30)、(27)及 $|f|\leqslant M$ 有界,即得(31)中的系数

$$|a_n|\leqslant\frac{1}{n!}|f^{(n)}(0)|\leqslant\frac{M}{n!\,R^n}\to 0 \quad (\text{当 } R\to 0 \text{ 时}).$$

由刘维尔定理可以证明代数基本定理：任何 n 次代数方程(这里 $n\geqslant 1$)至少有一个根.

我们来证明这个定理.设

$$P(z)=\alpha_nz^n+\alpha_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\alpha_0=0 \qquad (\text{其中 } \alpha_n\neq 0)$$

是个代数方程．我们要证明整函数 $P(z)$ 至少有一个零点，即 $P(z)$ 在这一点为零．今用反证法．假定 $P(z)$ 没有零点，那么 $\frac{1}{P(z)}$ 也是一个整函数．因为

$$|P(z)| = \left|z^n\left(\alpha_n + \frac{\alpha_{n-1}}{z} + \cdots + \frac{\alpha_0}{z^n}\right)\right|$$

$$\geqslant |z|^n\left(|\alpha_n| - \frac{|\alpha_{n-1}|}{|z|} - \cdots - \frac{|\alpha_0|}{|z|^n}\right).$$

(其中 $z\neq 0$)

所以，我们有

$$\lim_{z\to\infty}|P(z)| = +\infty, \qquad \lim_{z\to\infty}\frac{1}{P(z)} = 0,$$

因而 $\frac{1}{P(z)}$ 在全平面有界．于是，根据刘维尔定理，$\frac{1}{P(z)}$ 恒等于零，与所设相矛盾，这就证明了 $P(z)$ 至少有一个零点．

如果函数 $f(z)$ 在开复平面上除有极点（即使得 $f(z)$ 成为无穷大的点）之外，到处解析，那么称 $f(z)$ 为一个**亚纯函数**．亚纯函数是整函数的推广，它可能有无穷多个极点．例如 $\frac{1}{\sin z}$ 是一个亚纯函数；又如

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},$$

也属于亚纯函数．

设 $f(z)$ 在点 a 的某个空心邻域 $0<|z-a|<R$（这里 $0<R\leqslant\infty$）内解析，又若 $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ 存在，则称点 a 是 f 的 **m 阶极点**．在这种点的附近，函数 $f(z)$ 当然不

可能展成关于 a 的幂级数，但是，在这点的附近却可以表示成一个含有 $(z-a)$ 的 m 项负方次的幂级数

$$f(z)=\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}$$
$$+C_0+C_1(z-a)+\cdots+C_n(z-a)^n+\cdots. \qquad (32)$$

函数在点 a 不具有解析性是由于在展开式(32)中具有 $(z-a)$ 的负方次的诸项所造成的，因此，称

$$\frac{C_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{C_{-1}}{z-a}$$

为展开式(32)的**主要部分**，因为它描述出亚纯函数在接近孤立奇点 a 时的情况. 亚纯函数在奇点附近变化情况的特点，由它的主要部分所决定. 在许多情形下，当我们知道一个亚纯函数在它的所有奇点的附近的展开式的主要部分之后，就可把这函数构造出来. 比如说，假若函数 $f(z)$ 为有理函数，且在无限远点为零，据刘维尔定理，则此函数即等于它在所有极点附近的展开式的主要部分之和；又，对有理函数来说，极点的数目是有限的，因此

$$f(z)=\sum_{(k)}\left[\frac{C^{(k)}_{-m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}+\cdots+\frac{C^{(k)}_{-1}}{z-a_k}\right].$$

在一般情况下，有理函数可以表示成它的各主要部分以及某一多项式之和，

$$f(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$$
$$=\sum_{(k)}\left[\frac{C^{(k)}_{-m_k}}{(z-a_k)^{m_k}}-\cdots-\frac{C^{(k)}_{-1}}{z-a_k}\right]+C_0+C_1z+\cdots+C_mz^m, \qquad (33)$$

其中 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都多项式.

(33)式给出了有理函数的表示式(或构造式),奇点在函数构造上所起的作用,表现得很清楚.在有理函数的各种各样的应用中,(33)式这样的构造式用起来很方便,而且在说明函数的奇点如何决定整个函数的结构时,它很有益处.看起来,所有的亚纯函数也正如有理函数一样,可以就它在各极点的主要部分来构造.比如 $\operatorname{ctg} z$,它的极点就是 $\sin z=0$ 的零点,即

$$\cdots,-k\pi,\cdots,-\pi,0,\pi,\cdots,k\pi,\cdots.$$

我们可以证明,函数 $\operatorname{ctg} z$ 在极点 $z=k\pi$ 处的主要部分为

$$\frac{1}{z-k\pi},\quad 其中\ k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots;$$

而函数 $\operatorname{ctg} z$ 即等于各极点的主要部分之和

$$\operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z+k\pi}+\frac{1}{z-k\pi}\right]. \tag{34}$$

亚纯函数按主要部分展成级数的表示式之所以重要,是因为在这种表示式中,函数的奇点已经清楚地表出,而且这样的解析表示还可以使我们算出在全平面上使函数具有定义的诸点的函数值.

在研究分析中许许多多重要的函数类时,亚纯函数理论是非常重要的.特别如积分方程论的建立,很大程度上有赖于亚纯函数论中的基本命题.另外,像泛函分析中算子理论的发展,仍常有赖于解析函数论中的一些事实.

5. 函数的解析表示

上面我们讨论了整函数和亚纯函数在其定义区域内的解析表示.假若函数不是整函数,则函数的幂级数展开

只在某一圆内收敛，这圆的圆周经过与圆心最近的函数的奇点.由是，这幂级数就不可能在所有使函数有定义的点皆能算出其函数值.因而，这解析函数就不可能在它的全部定义域之内用一个幂级数来表示.于是当我们在一个不是圆形的区域内研究函数时，我们就遇到一个问题，是否能找到函数的一个解析表示，使得它适于在函数的整个定义域之内表示函数.回答是肯定的.我们所提出的问题的一般答案，可由下面的定理给出：

设 $f(z)$ 是边界由一条曲线所做成的区域内的解析函数，则它可以展开成多项式级数

$$f(z)=P_0(z)+P_1(z)+\cdots+P_n(z)+\cdots.$$

上定理只一般地指出了 $f(z)$ 在其定义域内可用多项式级数来表示的可能性(或存在性)，但是这定理还不能使我们根据它具体构造出函数的多项式级数.关于根据所给的函数(或它的某些性质)构造出多项式级数的问题，造出收敛最快的级数以及与该函数变化情况的特点密切相关的级数问题，以及根据已经给定的用来表示函数的多项式级数以研究函数的构造的问题，等等，就构成了用多项式逼近函数的“逼近理论”，它也是数学的一个重要分支.

三、唯一性和解析延拓

1. 解析函数的唯一性

解析函数的最重要性质之一，是它的唯一性.

假定 $f(z)$和 $g(z)$是区域 G 上的两个解析函数，$\{z_k\}$ 是 G 内彼此不同的点列 ($k=1,2,3,\cdots$)，若点列 $\{z_k\}$ 的聚点 $z_0\in G$，且

$$f(z_k)=g(z_k),\qquad (k=1,2,3,\cdots)$$

则在 G 内

$$f(z)\equiv g(z).$$

证明 令 $F(z)=f(z)-g(z)$，则 $F(z)$ 在 G 内解析，且 $F(z_k)=0$(其中 $k=1,2,\cdots$).因为 $\lim\limits_{k\to\infty}z_k=z_0\in G$，由 F 在 z_0 的连续性可知 $F(z_0)=0$，可见 z_0 是 $F(z)$ 的零点. 但是 $F(z)$在 z_0 的邻域内恒等于零的充要条件是：对于一切正整数 $n\geqslant 0$，$F^{(n)}(z_0)=0$，这表明非常数函数 $F(z)$在 z_0 的零点应是孤立的. 既然 z_0 是 $F(z)$的非孤立零点，因此在 G 内必存在 z_0 的某一邻域，使得在这一邻域上 $F(z)\equiv 0$.由是，在 G 内必有 $F(z)\equiv 0$. 事实上，记 G_1 为 G 内这种点的集合，在它的每一点均存在 G 内的一个邻域，F 在这邻域上恒等于零，令 $G_2=G\setminus G_1$，只需证明 G_2 是空集即可.由 G_1 的定义，可知 G_1 是开集；又因

$G_2=\{z_1:z_1\in G$,存在 z_1 的邻域 $O(z_1)$ 使得 $F(z)\neq 0\}$,
由非常数解析函数零点的孤立性,可知 G_2 也是开集,显然 $G_1\cap G_2=\varnothing$,$G=G_1\cup G_2$.据假设 $z_0\in G_1$,所以 G_1 是非空的,则必 $G_2=\varnothing$(不然,与 G 是连通性矛盾).于是 $G=G_1$,即 $F(z)$在 G 内恒等于零.

现在我们看到,对于在区域内处处可导的复变函数,它具有这样好的性质,以致在 G 内有聚点的点列 $\{z_k\in G\}$ 上的函数值决定了整个区域 G 上的函数值.这是解析函数所具有的又一特性.

我们知道,在实变函数范围内,函数的可导性并没有这种类似的性质.事实上,我们可以造出几个函数,它们可微分任意多次,在实轴 Ox 的某一区间内相同,而在其它的点则不相等.例如当 x 取负值时等于零的函数可以这样定义,使得它当 x 取正值时异于零,且有任意次的连续导数.比如说,当 $x>0$ 时,令 $f(x)=e^{-1/x}$ 即可做到这点.

2. 解析延拓与完全解析函数

在定义复变函数时,函数的定义域常为定义函数的方法所限制.比如,设函数由级数

$$f(z)=1+z^2+z^3+z^4+\cdots. \tag{35}$$

所定义.我们知道,这级数的收敛半径为1,它在单位圆内收敛,而在圆外发散.因此,由(35)所定义的解析函数只在这单位圆内有定义.另一方面,级数在圆 $|z|<1$ 的和可表示成

$$f(z)=\frac{1}{1-z}. \tag{36}$$

上述函数对于任何值 $z\neq1$ 都有定义.根据唯一性定理,(36)式给出了唯一在圆 $|z|<1$ 内与级数(35)之和相等的解析函数. 于是,原先只在单位圆内有定义的函数,我们已经把它拓展到全平面, $z=1$ 是它的极点.

设 $f(z)$ 是某一区域 D 内的解析函数,如果存在另一个解析函数 $F(z)$,其定义域 Δ 包含有 D, 且在 D 内 $F(z)=f(z)$, 根据唯一性定理, $F(z)$ 在 Δ 内的值是由 f 所唯一决定的. 我们称 $F(z)$为 $f(z)$的**解析延拓**. 一个解析函数,若不能再解析延拓到这域的外面去,这样的函数我们称为**完全解析函数**,其定义域称为**完全定义域**. 我们知道,平面上的整函数是完全函数,亚纯函数也是完全函数,它除了它的极点之外处处有定义.但也存在着解析函数,其完全定义域是一个有界区域.比如,函数

$$f(z)=z+z^2+z^4+z^8+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}z^{2^n}$$

的收敛半径是 1,我们不难证明,单位圆域 $|z|<1$ 就是它的完全定义域.

现在我们以对数函数

$$\mathrm{Ln}z=\ln r+i\varphi$$

为例,说明它是完全解析函数. 在这里, $r=|z|$, $\varphi=\arg z$. 假若在 z 平面上的某一点 $z_0=r_0(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0)$,其函数的初值为

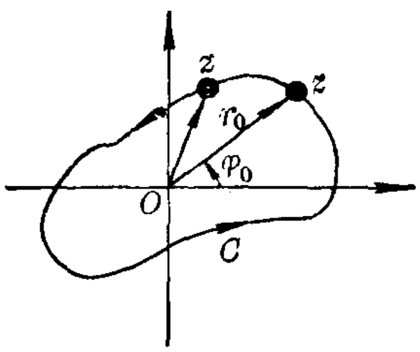


图 10

$$(\mathrm{Ln} z_0)_0 = \ln r_0 + i\varphi_0,$$

那么，当 z 点沿某一曲线 C 移动时，我们的解析函数就可以连续不断地解析延拓下去，正如以前所说过，当 z 从 z_0 出发沿闭曲线 C 移动一周回到 z_0 时，此时的函数值为

$$(\mathrm{Ln} z_0)_1 = \ln r_0 + i(\varphi_0 + 2\pi).$$

假若 z 从 z_0 出发描过这闭曲线 n 次时，所得到的函数值为

$$(\mathrm{Ln} z_0)_n = \ln r_0 + i(\varphi_0 + 2n\pi).$$

假若 z 从 z_0 出发按顺时针方向描过闭曲线 C n 次时，我们所得到的值为

$$(\mathrm{Ln} z_0)_{-n} = \ln r_0 + i(\varphi_0 - 2n\pi).$$

上述论证说明，由这样解析延拓所得到的函数为完全函数，其完全定义域是“无限层”的复平面，但原点和无穷远点处是一层的.

再讨论一个例子.令

$$w = \sqrt[n]{z}.$$

如同上面一样，可以指出，这函数也是多值的，且取 n 个值：

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right),$$

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right),$$

………………………………………………………………，

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

假若我们从函数的一个值

$$w_0=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n}+i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right)$$

出发，并绕一条包围坐标原点的闭曲线移动，我们就可得到函数所有不同的值，因为每绕原点一周，角 φ 即增加 2π.

绕闭曲线移动$(n-1)$次，则从 $\sqrt[n]{z}$ 的第一个值出发，我们就得到了它的$(n-1)$个其余的值.绕曲线移动 n 次，则得根值

$$\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0+2n\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2n\pi}{n}\right)$$
$$=\sqrt[n]{r_0}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n}+i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right),$$

即又回到了出发时所取的值.

上述论证说明，$\sqrt[n]{z}$ 函数的完全定义域是“n 层”的复平面，但原点和无穷远点是“一层”的.

3. 多值函数的黎曼面

如上面所述，多值函数 $\mathrm{Ln}\, z$ 和 $\sqrt[n]{z}$ 的值域是复平面，而其完全定义域是“无限多层”或“有限层”，但原点和无穷远点只有“一层”的复平面. 德国数学家黎曼 (G. F. B. Riemann) 为了使多值函数的值域与其完全定义区域之间建立一对一的对应关系，引进了被后人称为**黎曼曲面**的概念，使得任何一个多值解析函数都可以看作是在它的黎曼曲面上的单值解析函数.要证明这一结论，只需把函数在一点 z 处的那些不同的值，分别归入黎曼曲面

的在这点 z 上面的那些不同的层上去就可以了.

我们试以上述两个函数为例,来加说明.

1° 对数函数 $w=\mathrm{Ln}\,z$ 的黎曼曲面

如上所述，$\mathrm{Ln}\,z$ 的完全定义区域是无穷层的复平面,但原点和无穷远点除外.为了不可能有包围原点的闭曲线出现，我们必须将复平面沿从原点到无穷远点的某一条简单曲线割开.为方便计,我们将复平面沿正实轴割开,记各层上所得的裂纹区域为 D_k:

$$2k\pi<\arg z<2(k+1)\pi \quad (其中\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

在开始的那个区域 D_0 内，我们考虑由条件 $0<\arg z<2\pi$ 所确定的那个分支 $w=\ln|z|+i\arg z$,把这个分支无限地延到区域 D_k 内去,其中 $k=\pm1,\pm2,\cdots$. 与此相应，无限多张形状相同的 D_k 叶片按照下述规定互相连接起来:每一张叶片 D_k 的割痕的下沿与叶片 D_{k+1} 的割痕的上沿相粘合.所得到的对数函数的黎曼曲面,其形状有如在图 11 中所表示的那样. 称 $z=0$ 与 $z=\infty$ 为曲面的对数支点.

2° 方根 $w=\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面

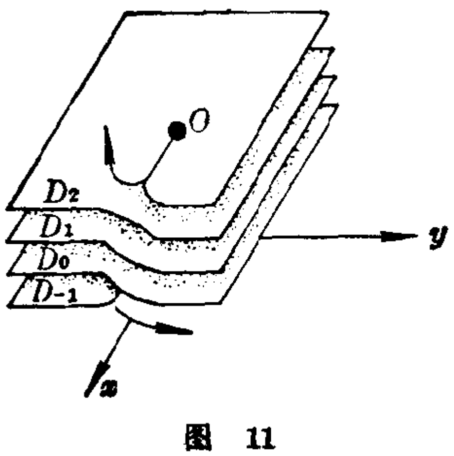


图 11

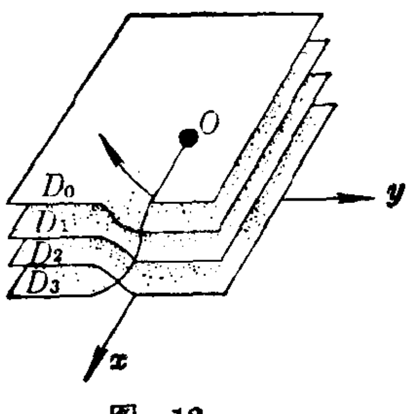


图 12

如前面所述，$\sqrt[n]{z}$的完全定义区域是 n 层的复平面，但是原点和无穷远点是单层的.为此，我们将复平面沿正实轴割开成区域 D_k，如上例中所述. 在开始的那个区域 D_0 内，我们考虑由条件 $0<\arg z<2\pi$ 所确定的那个分支 $f_0(z)$，然后把它延拓到区域 D_1，D_2，…，D_{n-1} 内去. 与此相对，我们将 n 张形状与 D_k 相同的叶片，把区域 D_0 中割痕的下沿与区域 D_1 中割痕的上沿粘合起来，区域 D_1 中割痕的下沿与区域 D_2 中割痕的上沿粘合起来，此余类推. 在正实轴上(以及在整个区域 $D_k=D_0$ 内)函数 $f_0(z)$与 $f_n(z)$的值相等.因此，我们必须想像成把余留下来空着的叶片 D_0 中割痕的上沿与 D_{n-1} 中割痕的下沿，互相粘合起来. $\sqrt[n]{z}$的在其它的 D_k 内的值，不过是重复这些已分出的值 f_0，f_1，…，f_{n-1} 而已，因此，所构成的这个 n 层的曲面，便是函数 $w=\sqrt[n]{z}$ 的黎曼曲面. 点 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是这个曲面的 n 阶代数支点(见图 12，其中置 $n=4$).

借以反应出多值函数的特征的多叶面，可以用同样方法对一切多值解析函数构造出来.这个曲面的各叶，在函数的支点周围相互结合在一起.看来，解析函数的性质与黎曼曲面的几何性质密切相关.引入这种曲面，不仅是用来作为阐明多值函数的特征的辅助工具，而且对于研究解析函数的性质，以及发展研究解析函数的方法，皆具有根本性的作用. 黎曼曲面就好像在复变数域与几何之间做成了一个桥梁，它不仅使我们可以把非常深奥的函数的解析性质与几何联系起来，而且还刺激起几何学中

一个新的分支——拓扑学——发展起来. 拓扑学乃是研究图形在连续变形之下不变的几何性质的学科.

如果 $F(z, w)$是 z 和 w 的多项式,我们把经过解方程

$$F(z, w)=0$$

得出的函数 $w=f(z)$叫做**代数函数**. 代数函数论中有一个显著的例子, 可以用来说明黎曼曲面的几何性质的重要性. 代数函数的黎曼曲面,在经过连续变换之后, 总可以变成一个球, 或一个带柄的球(见图 13). 柄的数目就是这种曲面的特征性质,这个数目叫做该曲面的**亏格**,或叫做该代数函数的**亏格**.从亏格出发,我们就可得出该曲面.看来,函数的亏格决定了代数函数最重要的性质.

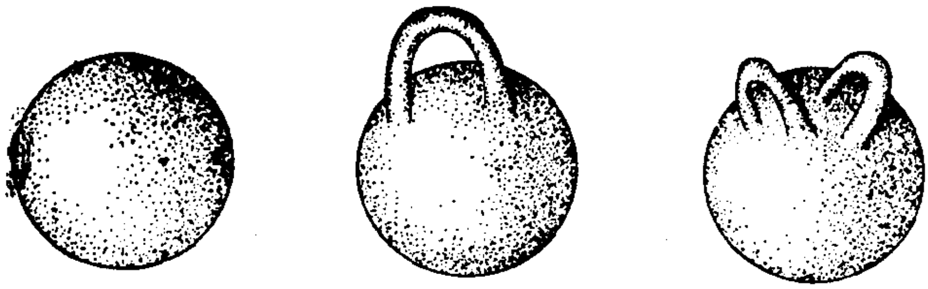


图 13

四、共形映照及其应用

1. 可导函数的几何性质

恰如在研究实变函数的时候一样,在复变函数论中,

函数的几何解释具有很重要的地位．研究复变函数的几何性质，不仅可以用来直观地表示出函数的解析性质，而且还给这种理论带来了一个专门的课题，形成一个数学分支，叫做“复变函数的几何理论”．

设 $w=f(z)$是区域 G 内的复变函数，γ 是 G 内一条曲线，参数方程为 $z(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta$，$\gamma$ 在 $w=f(z)$映照下的像 γ' 的参数方程自然可取为 $w(t)=f(z(t))$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$．如果 $w=f(z)$在 $z_0=z(t_0)$（其中 $\alpha\leqslant t_0\leqslant\beta$）处有导数且不为零，我们要研究 $w=f(z)$在 z_0 处的性态．

设 $z'(t_0)$存在且不为零，于是 $w'(t_0)=f'(z_0)z'(t_0)$ 也必存在且不为零，γ 在 z_0 处的切线方向为 $\arg z'(t_0)$，而 γ' 在 $w_0=f(z_0)$处的切线方向必为

$$\arg w'(t_0)=\arg f'(z_0)+\arg z'(t_0). \tag{37}$$

这个关系说明，如将 z 平面与 w 平面重合，且使 z_0 与 w_0 对应，并使两正实轴方向吻合，那么 γ' 在 w_0 处的切线与 γ 在 z_0 处的切线之间的交角等于 $\arg f'(z_0)$，这是一个与 γ 无关的量．基于这一理由，在 $w=f(z)$的映照下，过 z_0 点的任何两曲线的夹角与过 w_0 的两条像曲线的夹角，其大小与方向都保持不变（如图 14 所示）．这个事

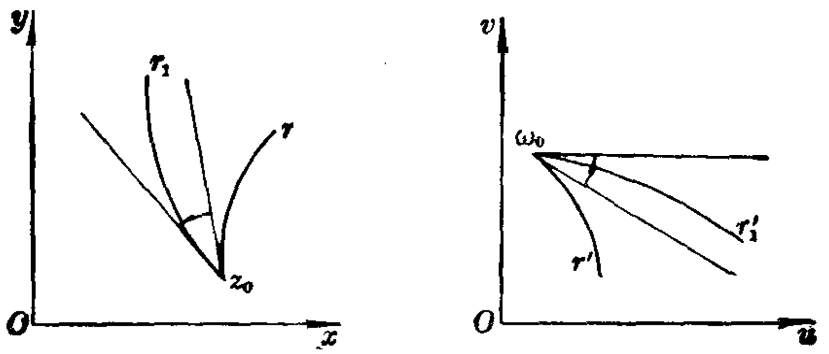


图 14

实告诉我们，一个映照在导数异于零的点处具有保角性.

以上对解析函数的导数的辐角作了几何解释，如果在该点的导数不为零，现在来说明导数模的几何意义.

导数 $f'(z_0)$ 存在且不等于零，则 $|f'(z_0)|$ 存在且不为零，由定义易知

$$|f(z)-f(z_0)|=|f'(z_0)||z-z_0|+o(|z-z_0|), \tag{38}$$

式中 $o(|z-z_0|)$ 关于 $|z-z_0|$ 是一个高阶无穷小量.这个式子说明，在不计及高阶无穷小的条件下，$w=f(z)$ 在 z_0 处的伸缩度是一个与方向无关的量 $\alpha=|f'(z_0)|$. 这个事实告诉我们，$w=f(z)$ 在导数存在的 z_0 处有一个不变的伸缩度 $|f'(z_0)|$，这是一个与方向无关的量. 基于这一理由，$w=f(z)$ 将 z_0 点的无穷小圆变成 $w_0=f(z_0)$ 的无穷小圆，如 $f'(z_0)\neq 0$.

从上面所证明的映照的几何性质，假若在某一点 z_0，有 $f'(z_0)\neq 0$，则在这点的附近，我们自然就会期望：在 z_0 点某一很小的邻域内，映照是一对一的，就是说，不仅每一点 z 有一点 w 与之对应，而且反过来，每一点 w 也只有一点 z 与之对应.这是可以严格证明的.

为了便于形象地了解在使得 $f'(z_0)=0$ 的那种点的附近的映照性质，我们来研究函数

$$w=z^n \quad (\text{其中 } n>1) \tag{39}$$

在原点的映照. 这函数的导数 $w'=nz^{n-1}$ 当 $z=0$ 时为零.为了便于研究映照(39)，最好利用极坐标或复数的三角表示。令

$$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$w=\rho(\cos\theta+i\sin\theta).$$

注意在复数相乘时，模相乘而辐角相加，则得

$$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi),$$

因而有

$$\rho=r^n,\qquad \theta=n\varphi.$$

从最后这个关系式可以看出，z 平面上的射线 $\varphi=\text{const.}$(常数)变成 w 平面上的射线 $\theta=n\varphi=\text{const.}$ 因之，z 平面上两条半射线之间大小为 α 的交角变成大小为 $\beta=n\alpha$ 的交角．此时，z 平面到 w 平面的映照已经不再是一对一的了．事实上，若给定了一个以 ρ 为模，以 θ 为辐角的点 w，则它可以作为 n 个 $r=\sqrt[n]{\rho}$ 为模，以

$$\varphi=\frac{\theta}{n},\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n},\ \cdots,\ \frac{\theta}{n}+\frac{2\pi}{n}(n-1)$$

为辐角的点的像而得出．当自乘 n 次幂时，相应点的模即等于 ρ，辐角即等于

$$\theta,\ \theta+2\pi,\ \cdots,\ \theta+2\pi(n-1),$$

因为把辐角加上一个 2π 的整倍数的量，并不改变该点的几何位置，故平面上所有的像皆为同一．

2. 共形映照

假如解析函数 $w=f(z)$ 把 z 平面上的区域 G 一对一地映照到 w 平面上的区域 D，则我们称 $f(z)$ 为从区域 G 到区域 D 上的**共形映照**，或称 $f(z)$ 是区域 G 上的**单叶函数**．显然，若 $f(z)$ 是区域 G 上的单叶函数，则 $f(z)$ 在 G 内可导，且其导函数 $f'(z)$ 在 G 恒不等于零．简单解

析函数给出的共形映照的一些例子如图15和图16所示.

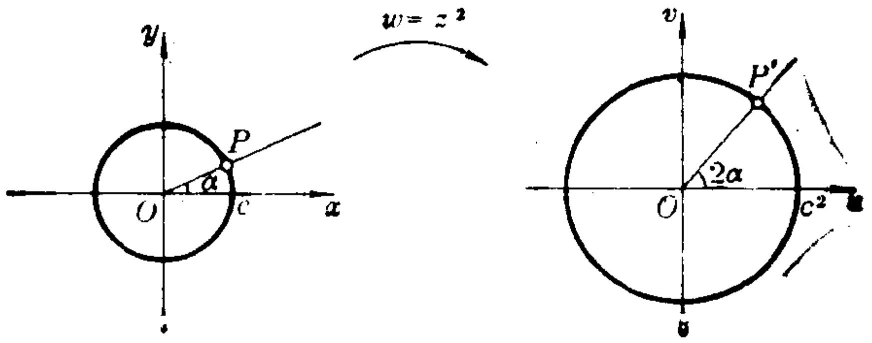


图 15

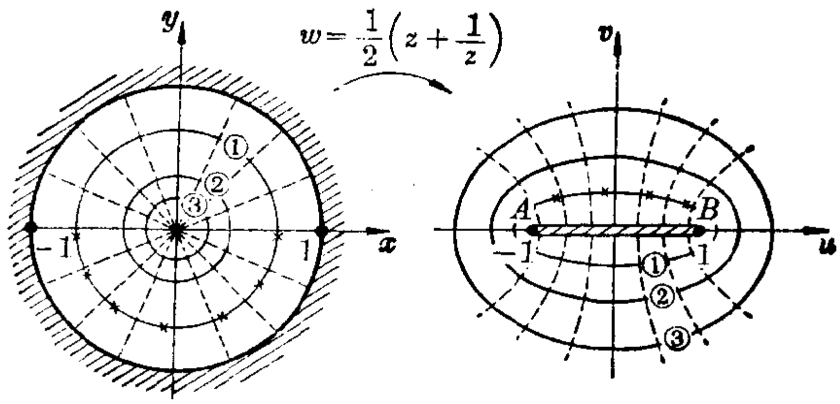


图 16

共形映照理论是复变函数论中发展最快的一部分. 中心的结果是黎曼的映照定理，它说每个由简单曲线所围成的区域,能被共形地映照到任一这样的区域. 例如,一个正方形能共形地映照成一个圆盘,如图 17 所示. 黎曼所给的映照定理的证明是出奇的简单，但是它含有一个基本的错误,在数学上几乎是件前所未闻的事情.多年来，给映照定理一个严格的证明，是对数学家的一个挑战,几个旺盛的数学分支也是源于这个问题.对此，今天已有很多有效的证明.令人惊奇的是,这些结果证实了黎曼原来的思路能行得通.

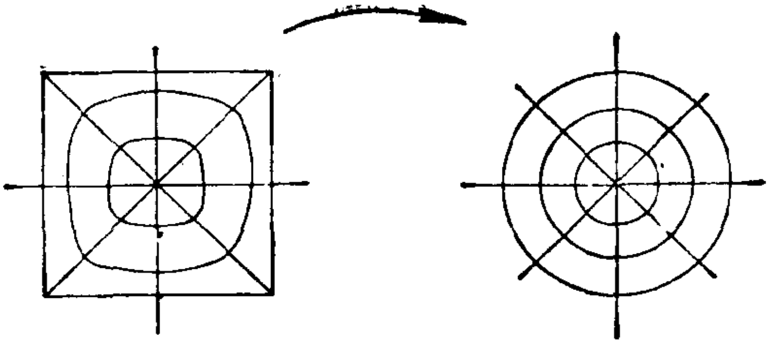


图 17

在这里,我们指出一个与单叶函数有关的猜想.如果我们考虑一个从以原点为中心、半径为1的圆盘到某个区域上的共形映照,则这个共形映照是用一个解析函数$f(z)$来描写的,它能表示为一个幂级数

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4+a_5z^5+\cdots.$$

一个众所周知的,以数学家比伯巴赫(L. Bieberbach)命名的猜想说:$|a_n|$不大于$n|a_1|$. 注意:这里包含着无穷多个命题,对每个$n=2,3,4,\cdots$都是一个命题. $n=2$时,命题是容易的,已由比伯巴赫所证明了,$n=3$的情况较之$n=2$有不能相比的困难,这是由楼浮纳(K. Löwner)在1923年所证明. 下一步,在30年后才解决,希否(M. Schiffer)和葛拉贝迪安(P. R. Garabedian)在1953年证明了比伯巴赫猜想中$n=4$的情况.当n是任意整数的一般情况,虽然有很多部分结果指明猜想是真的,但一直未得到解决,直到1984年,这个著名的比伯巴赫猜想终于被美国数学家德·路易斯·勃朗奇(L. de Branges)所证明.

3. 共形映照的应用

共形映照在数学物理上有广泛的应用. 我们只提及

一个在流体力学上的应用.例如考虑一个如图 18 所示的从一个带形到沟状区域的共形映照. 水平线的像是一个流体的可能流的流线,垂直线的像称为等势线.小的立方体的像的大小,可用来计算流体作用在壁上的压力.



图 18

然而,要用这个方法去描述流体流动,只有在受限制的假定下才是可能的.这必须是一个不可压缩的、无磨擦的、无重量的流体的稳定、二维的无旋流动.在自然界,并不存在这样的流.虽然如此,有很多情况在复变函数论基础上的计算,会给出现实物理过程的有用的精确描绘.

在一定的限制下, 可将这方法应用于围绕着机翼的空气流上. 从本世纪初库搭 (W. Kutta) 和茹柯夫斯基 (Жуковский)的开拓性工作, 一直到第二次世界大战末期,机翼的设计是基于一个理论,这个理论包括有从机翼截面(称之为"侧像")到一个圆盘上的共形映照.

用共形映照计算理论上对机翼的压力分布, 其作用不过是给实验工作和实际设计提供一些指标线. 现在的发展基本上已是完善的.由此就引出一个问题,要寻求一个共形映照, 把一个区域映照到一个具有给定几何形状的区域上去.在许多最简单然而有用的情况,这个问题可利用初等复变函数来解决.但在一般情况下,初等函数却无济于事. 真正要作出一个共形映照把一个区域映照到

另外一个区域上去，这有时是一件非常困难的事，至今仍有人在继续研究共形映照的实现问题.

五、一个著名的函数

设 z 是一个大于 1 的正数，则无穷级数

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\frac{1}{4^z}+\cdots \tag{40}$$

能求和. 这是说有一个数，我们称之为 $\zeta(z)$，使得对较大的 N 计算有限和

$$1+\frac{1}{2^z}+\frac{1}{3^z}+\cdots+\frac{1}{N^z}$$

所得的值，可十分接近 $\zeta(z)$. 如此，对每个 z 指定一个值 $\zeta(z)$ 的规则，是一个函数，称为黎曼的"Zeta"(彩搭)函数.

由上面所写的公式，Zeta 函数是对大于 1 的正数定义的. 黎曼指出有一个切实的方法使 Zeta 函数可以对所有的实值和复值 z 定义，但 $z=1$ 除外. Zeta 函数自然是一个解析函数. 黎曼也完全认识到对 z 为复值的 Zeta 函数的研究，是一个获得关于素数的信息的方法. 瑞士数学家欧拉(L.Euler)利用算术基本定理(即每个整数能分解为一些素数的积，除了这些因子的次序外，这个分解是唯一的)，证明了下述定理：

如果 $\mathrm{Re}\, z>1$，则

$$\zeta(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-p_n^{-z}}\right), \tag{41}$$

其中 $\{p_n\}$ 是素数序列.所谓素数是不为 1 的正整数，且除了 1 和它自己之外不能被其它任何正整数整除，例如 2,3,5,7,11,13,17,19,23 等等都是素数.

这一定理清楚地指出了 Zeta 函数与数论之间的紧密联系. 顺便说明一下无穷乘积的概念. 设 p_1, p_2, $\cdots$, p_n,$\cdots$是一复数序列,又设 $P_n=p_1p_2\cdots p_n$, 如果 $P=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$ 存在且不等于零,则称无穷乘积

$$p_1p_2\cdots p_n\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}p_n$$

收敛.

在黎曼之后很多年，直到十九世纪末，阿达玛 (J. Hadamard) 和德拉瓦莱-普森 (Ch. J. De la Vallee-Poussin)运用 Zeta 函数和整个复变函数的结果,其中部分结果就是他们发展的，证明了素数定理. 这个定理断言小已给定的 x，所有对于 x 的素数的个数是近似等于 $\frac{x}{\log x}$，或是近似等于

$$\frac{x}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{x}}.$$

设 $\pi(x)$表示不超过 x 的素数的个数,素数定理断言

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}=1+\varepsilon(x). \tag{42}$$

其中,当 x 充分大时,这里的 $\varepsilon(x)$可以任意小. 这个定理首先是由高斯观察素数表而猜测的.

这确实是令人惊奇与令人感到神秘的：一个关于素

数的定理，最先居然是用复分析方法证明的．寻找一个不用复分析的证明，直到 1951 年才解决．纵然如此，复分析仍是得到关于素数信息的最强有力的工具．

自从 Zeta 函数被引入以来，它一直是数学上大量研究的课题．对它的大量的研究，集中在探讨它的根的性质．一个函数的根，是使得函数值为零的那些数．例如函数 $\sin x$ 的根是所有的整数乘以 π，即当 $x=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，… 时，$\sin x=0$．关于 Zeta 函数的根，已知

（i）每个负偶数是它的根，

（ii）还有无穷多个其它的根，

（iii）所有其它的根都是复数，具有形式 $s+it$，这里 s、t 都是实数，且 s 是在 0 和 1 之间．

黎曼自己猜测：所有复根都有 $s=\frac{1}{2}$，这就是著名的黎曼假设．

证明或否定这个黎曼假设，被公认为对当今数学家最富有挑战性和最困难的问题．黎曼假设的证明，将给出素数定理中误差 $\varepsilon(x)$ 的准确的信息，并且将立刻在数论上建立一大批其他结果．但是，所有数学家都敬畏黎曼假设的真正原因，是他们知道自黎曼以来的最伟大的数学家都试图解决此问题，而从未获得成功，只使这个假设引起许多深入与美妙的研究．

我们能否用计算机来研究这个问题呢？可以，但只能在任意的精度内计算有限个 Zeta 函数的零点．至今，还没有发现有什么计算结果与黎曼假设相矛盾．

六、多复变数函数

1. 多复变数的全纯函数

上述关于复变数函数的理论，可以推广到多个复变数的情形.

以 $\mathbb{C}^n$ 表示 n 维复欧氏空间,其中的点为 $z=(z_1,\cdots,z_n)$，这里的每一个 z_j 是一个复数($j=1,2,\cdots,n$). 设 Ω 为 $\mathbb{C}^n$ 中的一个区域,对于复值函数 $f(z)$,如果对于 Ω 中的任何点 $z^0=(z_1^0,\cdots,z_n^0)$，函数 $f(z)$ 在点 z^0 附近可以表为下述形式的收敛级数

$$f(z)=\sum_{s_1,\cdots,s_n=0}^{\infty}C_{s_1,\cdots,s_n}(z_1-z_1^0)^{s_1}\cdots(z_n-z_n^0)^{s_n},$$

这时，我们称函数 $f(z)$在 Ω 上是**全纯**的. 这个定义，是本书第一章第 3 节中定义单复变数“解析函数”这一概念的形式推广.而且,可以如同第一章第 4 节中所进行的那样,导出 $f(z)$对每一个复变数在点 z^0 的偏导数存在；并且,对每一个复变数而言,它满足柯西-黎曼方程,即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)}{\partial x_j}=\dfrac{\partial v(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)}{\partial y_j},\\[2ex]\dfrac{\partial u(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)}{\partial y_j}=-\dfrac{\partial v(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_n)}{\partial x_j},\end{cases}$$

$j=1,\cdots,n$,这里 $z_j=x_j+iy_j$, $f(z)=u(z)+iv(z)$, $u(z)=u(x_1,\cdots x_n,y_1,\cdots y_n)$,$v(z)=v(x_1,\cdots x_n,y_1,\cdots y_n)$. 也

可以由如同本书第三章第1节中所进行的那样，证明全纯函数的唯一性，即：如果 f 和 g 是在区域 Ω 上定义的两个全纯函数，并在某一点的邻域有 $f(z)=g(z)$，那末在整个 Ω 上，$f(z)$ 与 $g(z)$ 是恒等的.

但是，如果将多复变数理论，理解为单复变数理论的简单的平行推广，那就完全错了.构成多复变数理论的主要部分，不是那些与单复变数理论相共同的性质，而是它的独特的性质.单复变数理论不过为之提供问题的背景，而解决多复变数理论的方法、思想却往往完全不同于单复变数理论. 这就使得多复变函数理论成为当前世界数学潮流中心之一，而且几乎用到了所有现代数学的概念与方法，并反过来影响着现代数学的众多分支的发展.

在以下几节中，我们只是举例来说明它与单复变数理论有多大区别.

2. 全 纯 域

在第三章中，曾介绍了单复变数函数"解析延拓"的概念.但是，在多复变数函数中，这却是完全不同的情形.

在单复变数中，若 Ω 为 $\mathbb{C}$ 中任意一个区域，$\tilde{\Omega}$ 为另一个包含 Ω 而较大的域，那末总是存在在 Ω 中解析但不能解析延拓到 $\tilde{\Omega}$ 的函数. 例如，只要任取在 $\tilde{\Omega}$ 中而不在 Ω 的一点 a，考虑函数 $\dfrac{1}{z-a}$ 即可. 对于这种现象，在多复变数中不再成立.

很早以前，哈托格斯(F. Hartogs)发现：$\mathbb{C}^n$ 中有些域

Ω 具有这样的性质：总是存在一个包含它的更大的域 $\tilde{\Omega}$，使得在 Ω 中全纯的函数，都可以全纯延拓到 $\tilde{\Omega}$ 中去(也就是说，这个函数也一定在 $\tilde{\Omega}$ 上全纯)．简单的例子如：Ω 为$\frac{1}{2}<|z_1|^2+|z_2|^2<1$，则可取 $\tilde{\Omega}$ 为 $|z_1|^2+|z_2|^2<1$．也就是如果 $f(z_1, z_2)$在$\frac{1}{2}<|z_1|^2+|z_2|^2<1$ 上全纯，则一定在$|z_1|^2+|z_2|^2<1$ 上全纯．

所以，我们有兴趣的域，应该是不具备上述延拓性质的域．于是，就建立起"全纯域"的概念．域 $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 称为**全纯域**，如果不存在更大的包含 Ω 的域 $\tilde{\Omega}$，使得对任何 Ω 上全纯的函数，都可以全纯延拓到 $\tilde{\Omega}$ 上．

问题是：哪些域是全纯域？如何来刻划它们．这曾是多复变数函数理论的历史发展中长期处于重要地位的问题．1910 年，列维(E. E. Lovi)提出著名猜想：全纯域与拟凸域是等价的．所谓"拟凸域"，粗略地说是这样的域：$\Omega\subset\mathbb{C}^n$ 为有界、光滑区域，这域由实值函数 $\lambda(z)$所定义，且在 Ω 的闭包的一个邻域中是无穷次可微的，$\lambda(z)<0$，若$z\in\Omega$；$\lambda(z)=0$，若 z 属于 Ω 的边界；$\lambda(z)>0$，若 z 在 Ω 及其边界之外，$\lambda(z)$的梯度不为零．若对于任意 Ω 的边界上的点 z，$\left(\frac{\partial^2\lambda(z)}{\partial z_i \partial z_j}\right)_{1<i,j<n}$ 这个矩阵是半定正的，则称 Ω 为**拟凸域**．对于列维猜想，曾经有很多大数学家作出了重要贡献，直到 1954 年才解决．

3. 域的分类

在第四章第2节中，曾叙述了单复变数的黎曼映照定理：每个由简单曲线所围成的区域，能共形映照到任一这样的区域．于是单复变数的区域的分类问题就完全解决了，因为任意这样的区域可以共形映照到一些典型的区域上．例如：任何一个边界多于一点的单连通区域，都可以共形映照到单位圆盘．但这个结果到了多复变数的情形，就不再成立了．例如：很早时候，庞加莱(H. J. Poincaré)就证明了：不存在全纯映照将多圆柱$|z_1|<1$，…，$|z_n|<1$映到单位球$|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2<1$上，尽管多圆柱与单位球都是单连通区域．

于是，问题归结为将多复变数的区域进行全纯分类的问题，即属于同一类中的区域都可以用全纯映照相互映照，而不同类的区域相互不能互相全纯映照，要将各种不同的类列举出来．这个问题距离解决还是十分遥远，只是对一些性质比较好的区域已有深入的结果．

若Ω为$\mathbb{C}^n$中的有界域，Ω到自身的双方一一的全纯映照称为Ω的**解析自同构**．若对Ω中任意两点，都存在解析自同构将一点映到另一点，则称Ω为**可递域**．对于这种区域，全纯分类有了很大的进展．如果更进一步，考虑一种特殊的可递域：对Ω中任一点z，存在解析自同构g，使$g(z)=z$，且$g^2=1$，则称Ω为**对称域**．关于对称域的分类，这问题已获全部解决，它等价于一些对称域的乘积，这些对称域为四类典型域及二类例外域，这四类

典型域，我国数学家华罗庚将它们表为：

$I-2\overline{Z}'>0$，　　Z 为 $m\times n$ 复矩阵；

$I-2\overline{Z}'>0$，　　Z 为 $n\times n$ 对称复方阵，即 $Z=Z'$；

$I-2\overline{Z}'>0$，　　Z为 $n\times n$ 斜对称复方阵，即$Z=-Z'$；

$$\begin{cases}1-|zz'|^2>0 \\ 1+|zz'|^2-2z\bar{z}'>0,\end{cases}\qquad z=(z_1,\cdots,z_n)\text{为一复向量，}$$

这里，I 表示单位方阵，上划“$-$”表示共轭，右撇“$'$”表示转置，$B>0$ 表示方阵 B 为定正．二类例外域：一个是 16 维，一个是 27 维的．

4. 积 分 表 示

在第二章第 2 节中，曾给出了解析函数的柯西积分公式．这是单复变数函数论中十分重要的公式．这个公式的意义在于：对一个解析函数，在区域内部的点的函数值，可以用函数在边界上的值来表达．人们当然希望得到在多复变数的情形时的相应的公式，但是，由于多复变数的情形远比单复变数复杂，且区域的全纯分类问题又远未解决，以至出现了十分众多的积分公式，但总的来讲，是从二个基本观点来推广柯西积分公式的，一是从希尔伯特 (D. Hilbert) 空间的观点，一是从外微分形式的观点．所谓从希尔伯特空间的观点，就是从构造区域上的完整正交系出发．所谓从外微分形式的观点，就是想法运用斯托克斯(G. G. Stokes)公式来建立积分公式．此外，对一些区域，例如典型域，全纯函数在区域内部的值完全由区域的边界上一部分函数的值所决定，而不是函数在区

域边界上全部的值.

5. 其　它

由于多复变数函数理论是一门正在蓬勃发展的学科，大量问题远未解决，并还在不断提出新的问题，在本书中不可能对当前大家有兴趣的问题都来叙述. 以上只是举了几个显得十分重要的问题作为例子. 其它一些问题，尽管十分重要，均不可能在此论及，如：著名的库辛(P. Cousin)问题；龙格(J. Runge)型定理(相当于第二章第 5 节中“逼近理论”在多复变数中的推广)；复流形(相当于第三章第 3 节中黎曼面在多复变数中的推广) 及复向量丛；层(Sheab)及以层为系数的上同调群；黎曼-罗赫(G. F. B. Riemann-G. Roch)定理的推广；自守函数理论；零点与奇点；$\bar{\partial}$ 问题；值分布理论，等等. 对此有兴趣的读者，可以阅读有关专著.